

鋼筋混凝土梁撓曲極限狀態拉力筋應變與縱向鋼筋用量之關係

杜昱石*

歐昱辰**

摘要

本文依循混凝土結構設計規範之撓曲分析方法，探討鋼筋混凝土雙筋梁，在相同設計彎矩與斷面尺寸下，撓曲極限狀態拉力筋應變與鋼筋用量之關係。研究結果闡釋拉力筋與壓力筋用量，隨極限狀態拉力筋應變變化而改變之趨勢。根據所呈現之趨勢，本研究發現，當極限狀態下，相較於介於 0.004 至小於 0.005 範圍之其他應變值，採用拉力筋應變為 0.005 之設計可得最小總鋼筋使用量，並得最佳斷面變形能力。若拉力筋應變大於 0.005，斷面極限狀態變形能力隨著應變之增加而增加，但總鋼筋量也可能隨之增加。本研究並探討耐震設計拉力筋用量上限條款與前述結論之關係，最終提出滿足規範之拉壓力筋配置辦法。

1. 前言

根據現行混凝土結構設計規範[1]，為確保梁於撓曲極限極限狀態下有足夠韌性，因此規定極限狀態時最外受拉鋼筋之淨拉應變 ϵ_t 不得小於 0.004。又規範[1]規定，當 ϵ_t 大於 0.005 時，屬拉力控制斷面，極限狀態時韌性較佳，因此採用較高之強度折減係數($\phi = 0.9$)。當 ϵ_t 介於 0.005 至鋼筋降伏應變之間時，屬過渡斷面，極限狀態時韌性較差，因此 ϕ 值隨著 ϵ_t 之減少，由 0.005 線性遞減至由螺箍筋之 0.7 或其他情形之 0.65。

對一 ϵ_t 介於 0.004 至 0.005 的梁而言，在撓曲極限狀態下， ϵ_t 越小，梁斷面所能提供的

* 國立台灣科技大學營建工程系大學部學生

** 國立台灣科技大學營建工程系副教授

計算彎矩強度 M_n 越大，因為混凝土壓力區較大，能提供較大的壓合力，因此容許較大之拉力區合力，導致較高之 M_n 。但 ϵ_t 越小， ϕ 值越低，在須維持一定量之設計強度 M_u 下，可能會需要更高之 M_n 。又 ϵ_t 低代表韌性低。另一方面來說， ϵ_t 越大，梁斷面所能提供的 M_n 就越多，然而 ϕ 值較高，在需維持一定量之 M_u 下，所需的 M_n 可能較低，且韌性較高。因 M_u 和 M_n 之間，有一 ϕ 值之作用， ϕ 值與 ϵ_t 成正相關，但 M_n 與 ϵ_t 呈負相關，又 M_n 與材料強度及用量有關，在上述原理綜合作用下，想要直接看出在 M_u 以及斷面尺寸與材料強度固定下， ϵ_t 與成本指標“鋼筋用量”之變化關係實屬不易。本研究依據規範之分析與設計方法，透過數學推導，以明確的原理原則來闡述 ϵ_t 與鋼筋用量之變化關係。工程師透過此關係可瞭解 ϵ_t 變化所導致的鋼筋用量的改變，並瞭解極限狀態下採用 ϵ_t 小於 0.005 是否有機會可以減少鋼筋用量。

許多文獻[2-4]均指出，雙筋設計有諸多優點，例如壓力筋可減少梁因潛變與乾縮造成之長期撓度；可與拉力筋形成另一力學機制，產

生更高的彎矩強度；壓力筋可支撐並錨定箍筋。就耐震設計而言，壓力筋的使用可增加斷面曲率韌性，因此規範[1]於耐震設計篇中，特別規定於梁柱交接面及其它可能產生塑鉸位置，壓力鋼筋量不得小於拉力鋼筋量之半，所以實務上梁多採雙筋配置，因此本研究針對雙筋梁進行探討。又實務上梁多採矩形設計，因此本研究之對象為矩形梁。

2. 固定設計彎矩強度下配筋量理論推導

2.1 推導過程中之基本假設

本研究對象為雙筋矩形梁，斷面基本尺寸之定義如圖 1 所示：其中 d' 為梁最外受壓纖維至受壓鋼筋形心之距離；有效梁深 d 為梁最外受壓纖維至受拉鋼筋形心之距離； b 為梁寬； h 為梁全深。為簡化推導，拉壓力筋採單排配置，此與目前實務傾向於採單排配置，使用較少數目之大號鋼筋之潮流符合。因此 ϵ_t 等於拉力形心位置應變 ϵ_s 。梁斷面達極限狀態時，混凝土壓應力之分佈假設可由 Whitney 等值應力塊[5]描述。鋼筋應力應變行為假設為理想彈塑性，意即鋼筋降伏後應力維持定值。

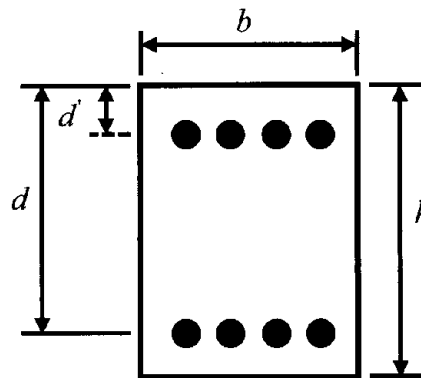


圖 1. 斷面基本尺寸定義

本研究將計算彎矩強度 M_n 分為 M_{n1} 與 M_{n2} 兩部份，其中 M_{n1} 為混凝土壓力區合力與相平衡之拉力筋合力所提供之彎矩強度（圖 2(a)）； M_{n2} 為壓力筋與相平衡之拉力筋合力所提供之彎矩強度（圖 2(b)）。 M_u 與 M_{n1} 以及 M_{n2} 之關係如式(1)所示。

$$M_u = \phi M_n = \phi(M_{n1} + M_{n2}) \quad (1)$$

透過變形諧和，極限狀態下壓力筋之應變 ϵ_{sc} 可由式(2)求得。

$$\epsilon_{sc} = 0.003 - \frac{0.003 + \epsilon_s}{d} \times d' \quad (2)$$

本研究將壓力筋配置在斷面極限狀態下仍能降伏之處，故 $\epsilon_{sc} \geq \epsilon_y$ ，代入此條件，可得

$$\frac{d'}{d} \leq \frac{0.003 - \epsilon_y}{0.003 + \epsilon_s} \quad (3)$$

若 d'/d 滿足式(3)之限制，則可確保極限狀態下壓力鋼筋降伏。

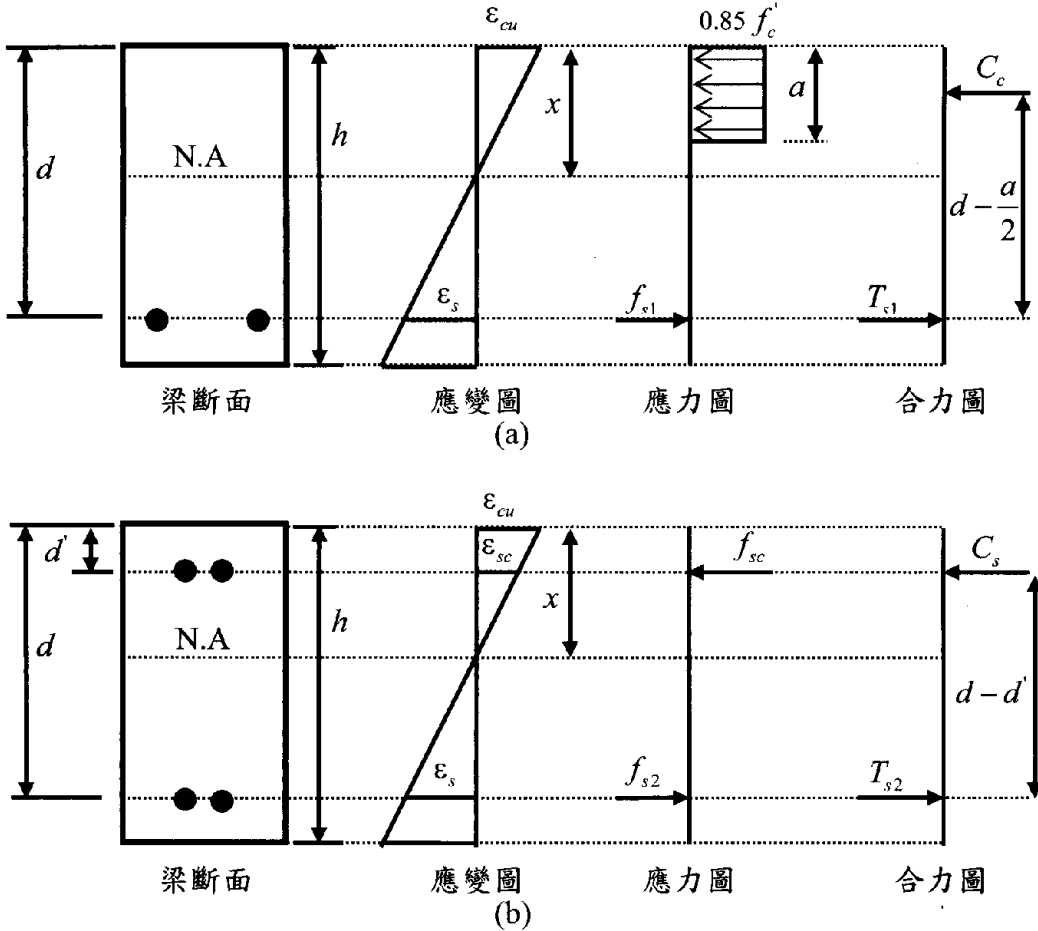


圖 2. (a) M_{n1} ; (b) M_{n2}

2.2 極限狀態下拉力筋形心位置應變 介於 0.004 至 0.005

2.2.1 彎矩強度

透過變形諧和，極限狀態下中性軸深度 x 為

$$x = \frac{0.003d}{0.003 + \varepsilon_s} \quad (4)$$

Whitney 等值應力塊深度 a 為

$$a = x\beta_1 = \frac{0.003d\beta_1}{0.003 + \varepsilon_s} \quad (5)$$

其中若 $f_c' \leq 280 \text{ kgf/cm}^2$ ， β_1 為 0.85，若 $f_c' > 280 \text{ kgf/cm}^2$ ，每增加 70 kgf/cm^2 ， β_1 值減少 0.05，但 $\beta_1 \geq 0.65$ 。混凝土壓力區合力為

$$C_c = 0.85 f_c' ab = 0.85 f_c' \frac{0.003bd\beta_1}{0.003 + \varepsilon_s} \quad (6)$$

對相對應拉力筋形心取彎矩，可得 M_{n1} 。

$$M_{n1} = C_c \left(d - \frac{a}{2} \right) = \frac{0.00255bd^2\beta_1 f_c'}{0.003 + \varepsilon_s} \left(1 - \frac{0.003\beta_1}{2(0.003 + \varepsilon_s)} \right) \quad (7)$$

M_{n1} 之計算如圖 2(a) 所示。 M_{n2} 與 M_u 之關係如下式所示。

$$M_{n2} = \frac{M_u}{\phi} - M_{n1} \quad (8)$$

其中 ϕ 值與 $\varepsilon_s (= \varepsilon_t)$ 之關係可由式(9)表達[1]。

$$\phi = \frac{0.9 - 0.65}{0.005 - \varepsilon_s} (\varepsilon_s - \varepsilon_y) + 0.65 = \frac{0.025\varepsilon_s - 0.9\varepsilon_y + 13}{0.005 - \varepsilon_s} \quad (9)$$

為後續推導需要以及表達設計彎矩強度具有一定大小，吾人可將 M_u 表達成 $\varepsilon_s = 0.005$ 之 M_{n1} 的倍數，如下式所示。

$$M_u = \alpha M_{n1} \quad (M_{n1} \text{ 之中的 } \varepsilon_s = 0.005) \quad (10)$$

將式(7)取 $\varepsilon_s = 0.005$ 代入式(10)可得

$$M_u = \alpha \frac{0.00255bd^2 f_c' (0.016 - 0.003\beta_1)}{0.008 \times 0.016} \quad (11)$$

將式(9)、式(7)與式(11)代入式(8)可得

$$M_{n2} = \alpha \frac{0.00255bd^2 f_c' (0.016 - 0.003\beta_1)}{0.008 \times 0.016} \times \frac{0.005 - \varepsilon_y}{\frac{0.25\varepsilon_s - 0.9\varepsilon_y}{y} + \frac{13}{4000}} - \frac{0.00255bd^2 f_c'}{0.003 + \varepsilon_s} \left(1 - \frac{0.003\beta_1}{2(0.003 + \varepsilon_s)} \right) \quad (12)$$

2.2.2 配筋量

M_{n1} 中平衡混凝土壓力所需之拉力筋用量 A_{s1} ，為壓力區合力 C_c (式(6)) 除以拉力筋降伏強度 f_y 。

$$A_{s1} = \frac{C_c}{f_y} = \frac{0.00255bd\beta_1 f_c'}{f_y (0.003 + \varepsilon_s)} \quad (13)$$

M_{n2} 可由第二部份彎矩之拉力筋合力，或壓力筋合力，乘上拉壓力筋合力之距離而求得。

$$M_{n2} = A_{s12} f_y (d - d') = A_{sc} (f_y - 0.85 f_c') (d - d') \quad (14)$$

其中 A_{s12} 為 M_{n2} 之拉力筋面積； A_{sc} 為 M_{n2} 之壓力筋面積。上式移項整理可得 A_{s12} 與 A_{sc} 。

$$A_{s12} = \frac{M_{n2}}{f_y (d - d')} \quad (15)$$

$$A_{sc} = \frac{M_{n2}}{(f_y - 0.85 f_c') (d - d')} \quad (16)$$

2.2.3 配筋量與拉力筋形心位置應變之關係

透過 A_{s1} (式(13)) 對 ε_s 之微分，可觀察 A_{s1} 與 ε_s 之間的關係，如下式所示。

$$\frac{dA_{st1}}{d\varepsilon_s} = \frac{d}{d\varepsilon_s} \left(\frac{0.00255bd\beta_1 f'_c}{f_y(0.003 + \varepsilon_s)} \right) = - \frac{0.00255bd\beta_1 f'_c}{f_y(0.003 + \varepsilon_s)^2} \quad (17)$$

由上式可發現，在 ε_s 可能的範圍內， A_{st1} 對 ε_s 之微分皆為負值，即 ε_s 越大， A_{st1} 用量越小。物理意義的解釋為，當 ε_s 越大，混凝土壓力區深度越小，混凝土壓合力越小，因此用來與混凝土壓合力平衡的拉力筋用量隨之減少。接著，透過 $A_{st2} + A_{sc}$ (式(15)+式(16)) 對 ε_s 之微分，可觀察 M_{n2} 鋼筋用量與 ε_s 之間的關係，如下式所示。(18)

$$\frac{d(A_{st2} + A_{sc})}{d\varepsilon_s} = \frac{d}{d\varepsilon_s} \left[\frac{M_{n2}}{f_y(d-d')} + \frac{M_{n2}}{(f_y - 0.85f'_c)(d-d')} \right] \quad (18)$$

上式提出常數項

$$\frac{d(A_{st2} + A_{sc})}{d\varepsilon_s} = \left[\frac{1}{f_y(d-d')} + \frac{1}{(f_y - 0.85f'_c)(d-d')} \right] \frac{dM_{n2}}{d\varepsilon_s} \quad (19)$$

上式可知 $A_{st2} + A_{sc}$ 對 ε_s 之微分正比於 M_{n2} 對 ε_s 之微分。 M_{n2} 如式(12)所示，將其對 ε_s 微分，並加以整理可得。

$$\frac{dM_{n2}}{d\varepsilon_s} = 0.003bd^2\beta_1 0.85f'_c \left[\frac{0.25\alpha \left(\frac{0.016 - 0.003\beta_1}{0.005 - \varepsilon_y} \right) + \frac{0.003 + \varepsilon_s - 0.003\beta_1}{(0.003 + \varepsilon_s)^3}}{0.008 \times 0.016 \left(\frac{0.25\varepsilon_s - 0.9\varepsilon_y + \frac{13}{4000}}{0.005 - \varepsilon_y} \right)^2} \right] \quad (20)$$

觀察上式右側括弧內部分，可發現當 α 值越大，括弧之值越小，若想得負斜率之結果，則可令中括弧為零，求解 α_0 ，可得下式。

$$\alpha_0 = \frac{0.003 + \varepsilon_s - 0.003\beta_1}{(0.003 + \varepsilon_s)^3} \times \frac{0.008 \times 0.016 \left(\frac{0.25\varepsilon_s - 0.9\varepsilon_y + \frac{13}{4000}}{0.005 - \varepsilon_y} \right)^2}{0.25(0.016 - 0.003\beta_1)(0.005 - \varepsilon_y)} \quad (21)$$

觀察式(21)可知，其中變數有 ε_s 、 β_1 、 ε_y ，若給定一組 β_1 與 ε_y 值，則 α_0 隨 ε_s 而變化。表 1 顯示在 $0.004 \leq \varepsilon_s \leq 0.005$ 區間內，在不同的 β_1 與 ε_y 值組合下， α_0 隨 ε_s 變化之最大值 α_{0max} 。

表 1. α_{0max}

	f'_c (kgf/cm ²)	210	280	350	420	490	560
	β_1	0.85	0.85	0.8	0.75	0.7	0.65
f_y (kgf/cm ²)	ε_y	α_{0max}					
2800	0.001373	1.237	1.237	1.265	1.292	1.318	1.344
4200	0.002059	0.966	0.966	0.986	1.007	1.028	1.048

表 1. 之意義在於，若 $\alpha > \alpha_{0max}$ ，意即 $M_u > \alpha_{0max} M_{n1} (\varepsilon_s = 0.005)$ ，可得在 $0.004 \leq \varepsilon_s \leq 0.005$ 區間內，式(20)為負值，

意即 M_{n2} 隨 ε_s 增加而遞減，而由式(19)可知，鋼筋用量 $A_{st2} + A_{sc}$ 將隨 ε_s 增加而遞減。若 $\alpha \leq \alpha_{0max}$ ，則 $A_{st2} + A_{sc}$ 將隨 ε_s 增加而遞增或

先遞增而後遞減。至於總鋼筋用量 $A_{sf1} + A_{sf2} + A_{sc}$ 對 ε_s 之微分可將式(17)與式

$$\frac{d(A_{sf1} + A_{sf2} + A_{sc})}{d\varepsilon_s} = -\frac{0.003bd\beta_1 0.85f'_c}{f_y(0.003 + \varepsilon_s)^2} + \left[\frac{1}{f_y(d-d')} + \frac{1}{(f_y - 0.85f'_c)(d-d')} \right] \frac{dM_{n2}}{d\varepsilon_s} \quad (22)$$

其中 $dM_{n2}/d\varepsilon_s$ 結果如式(20)所示。在可能的材料強度、斷面設計參數以及 α 值之範圍內，式(22)皆為負值。此意謂總鋼筋用量隨著 ε_s 增加而遞減。

眾所周知，極限狀態下 ε_s 越高，代表斷面極限曲率越高，一般代表斷面擁有越佳的變形能力，有益於耐震性能。本節之推導顯示，在相同的設計彎矩強度 M_u 的條件下，於設計時採用 $\varepsilon_s = 0.005$ ，比起其他 ε_s 值 ($0.004 \leq \varepsilon_s < 0.005$)，不但有較佳的耐震性能 (較大之 ε_s 值)，且使用較少的總鋼筋用

(19)相加而得

量 (較小之 $A_{sf1} + A_{sf2} + A_{sc}$ 值)。若進一步滿足 $\alpha > \alpha_{0max}$ ，則無論 A_{sf1} 或 $A_{sf2} + A_{sc}$ 皆隨 ε_s 增加而呈遞減趨勢，代表更有效率地使用鋼筋材料。

2.3 極限狀態下拉力筋形心位置應變大於或等於 0.005

2.3.1 彎矩強度

當 $\varepsilon_s \geq 0.005$ 時， $\phi = 0.9$ ， M_{n1} 之表示式，如式(7)所示。將 $\phi = 0.9$ 代入式(8)，再按式(10)至式(12)之推導方式，可得 M_{n2} ，如下式所示。

$$M_{n2} = \alpha \frac{0.003bd^2\beta_1 0.85f'_c(0.016 - 0.003\beta_1)}{0.008 \times 0.016 \times 0.9} - \frac{0.003bd^2\beta_1 0.85f'_c}{0.003 + \varepsilon_s} \left(1 - \frac{0.003\beta_1}{2(0.003 + \varepsilon_s)} \right) \quad (23)$$

由於 M_u 與 ϕ 為定值，式(1)對 ε_s 微分可得下式。

$$\frac{dM_u}{d\varepsilon_s} = 0 = \phi \left(\frac{dM_{n1}}{d\varepsilon_s} + \frac{dM_{n2}}{d\varepsilon_s} \right) \quad (24)$$

式(7)對 ε_s 微分可得 $\frac{dM_{n1}}{d\varepsilon_s}$ ，如下所示。

$$\frac{dM_{n1}}{d\varepsilon_s} = -\frac{0.003bd^2\beta_1 0.85f'_c}{(0.003 + \varepsilon_s)^2} \left(1 - \frac{0.003\beta_1}{0.003 + \varepsilon_s} \right) \quad (25)$$

代入式(24)可得 $\frac{dM_{n2}}{d\varepsilon_s}$

$$\frac{dM_{n2}}{d\varepsilon_s} = -\frac{dM_{n1}}{d\varepsilon_s} = \frac{0.00255bd^2\beta_1 f'_c}{(0.003 + \varepsilon_s)^2} \left(1 - \frac{0.003\beta_1}{0.003 + \varepsilon_s} \right) \quad (26)$$

由式(25)與式(26)，吾人可以清楚的觀察到，隨著 ε_s 的增加， M_{n1} 隨之遞減，但 M_{n2} 隨之遞增。 M_{n2} 遞增乃因 ϕ 值為常數(0.9)，因此當 M_{n1} 越小， M_{n2} 則需提高，以維持相同的 M_u 。

2.3.2 配筋量

鋼筋用量 A_{sf1} 可由式(13)計算而得。 A_{sf2} 與 A_{sc} 則可分別由式(15)與式(16)求得，式中 M_{n2} 則由式(23)計算之。

2.3.3 配筋量與拉力形心位置應變之關係

A_{st1} 對 ϵ_s 之微分結果同式(17)，因此 A_{st1} 對 ϵ_s 之關係如前所述，即 ϵ_s 越大、 A_{st1} 用量越小。 $A_{st2} + A_{sc}$ 對 ϵ_s 之微分同式(19)，其中

$$\frac{d(A_{st1} + A_{st2} + A_{sc})}{d\epsilon_s} = \frac{0.003bd\beta_1 0.85f'_c}{(0.003 + \epsilon_s)^2} \left[\frac{1}{f_y} + \frac{d}{d-d'} \left(1 - \frac{0.003\beta_1}{0.003 + \epsilon_s} \right) \left(\frac{1}{f_y} + \frac{1}{f_y - 0.85f'_c} \right) \right] \quad (27)$$

因此吾人可知，當 $\epsilon_s \geq 0.005$ ，在不改變斷面設計彎矩強度 M_u 下，欲獲取極限狀態下越高的 ϵ_s ，第一部分彎矩 M_{n1} 的拉力筋用量 A_{st1} 需降低；第二部分彎矩 M_{n2} 的拉壓力筋總量 $A_{st2} + A_{sc}$ 需提高；總鋼筋用量則是呈現遞增之趨勢。前述推導顯示，欲獲取越佳的耐震性能（越高的 ϵ_s ），需提高總鋼筋用量。

透過求取拉力筋總用量 $A_{st1} + A_{st2}$ 以及壓力筋用量 A_{sc} 對於對 ϵ_s 之微分，吾人可探討在不改變斷面設計彎矩強度 M_u 下，拉力筋與壓力筋用量與斷面變形能力之關係。首先求取拉力筋總用量 $A_{st1} + A_{st2}$ 對 ϵ_s 之微分，如下式所示。

$$\frac{d(A_{st1} + A_{st2})}{d\epsilon_s} = -\frac{0.00255bd\beta_1 f'_c}{f_y(0.003 + \epsilon_s)^2} \left[1 - \frac{d}{(d-d')} \left(1 - \frac{0.003\beta_1}{0.003 + \epsilon_s} \right) \right] \quad (28)$$

觀察上式，可知當右側中括弧為正，則式(26)值為負，可得 $A_{st1} + A_{st2}$ 隨 ϵ_s 遞減之結果。令上式右側中括弧內為 0，可得上式正、負值之界線。

$$1 - \frac{d}{(d-d')} \left(1 - \frac{0.003\beta_1}{0.003 + \epsilon_s} \right) = 0 \quad (29)$$

$dM_{n2} / d\epsilon_s$ 結果如式(26)所示，由前述兩式可知，隨 ϵ_s 之增加， $A_{st2} + A_{sc}$ 用量隨之提高。總鋼筋用量 $A_{st1} + A_{st2} + A_{sc}$ 對 ϵ_s 之微分如式(27)所示，該式於一般材料強度範圍內為正值，代表總鋼筋用量隨 ϵ_s 之增加而提高。

定義 $(d-d')/d$ 為深度比(depth ratio)，一般情況下此倍數範圍會介於 0.8 至 0.95 之間。透過式(27)，可求得不同 β_1 值情況下， ϵ_s 與深度比之關係（圖 3），此關係代表某深度比之下，拉力筋總量呈遞減趨勢之極限 ϵ_s ；意即斷面深度比不變，當 ϵ_s 由 0.005 增大時，拉力筋總用量之趨勢為遞減，直到 ϵ_s 增加到圖 3 之曲線所對應的值，當 ϵ_s 超過圖 3 曲線所對應之值，則拉力筋總用量轉為遞增。

壓力筋用量 A_{sc} 對於對 ϵ_s 之微分如下式所示。

$$\frac{dA_{sc}}{d\epsilon_s} = \left[\frac{1}{(f_y - 0.85f'_c)(d-d')} \right] \frac{dM_{n2}}{d\epsilon_s} \quad (30)$$

其中 $\frac{dM_{n2}}{d\epsilon_s}$ 如式(26)所示。因式(26)恆為正

值，所以壓力筋用量隨著 ϵ_s 之增加，恆為遞增。前述推導顯示，在相同的設計彎矩強度下，欲提高斷面的變形能力，則需提高壓力筋用量，至於拉力筋的用量則需先減少而後增加。

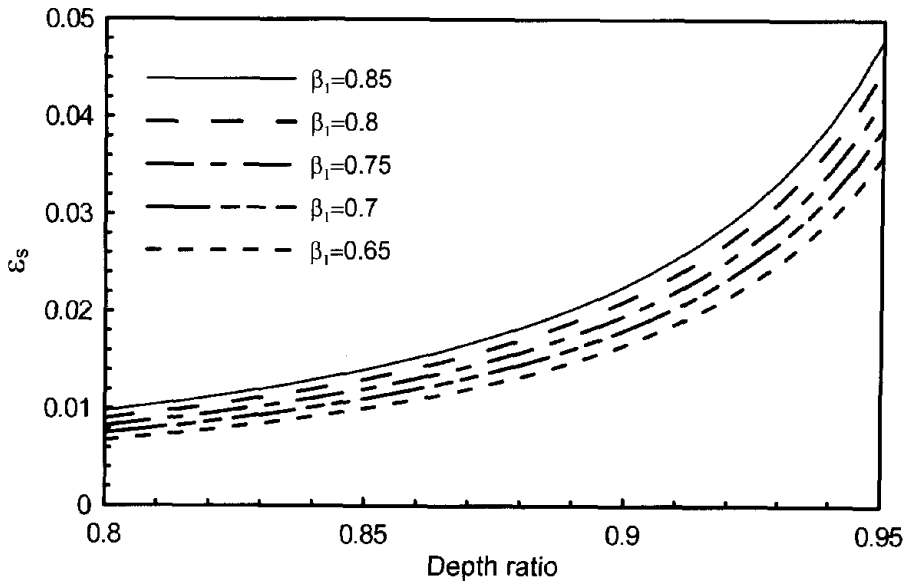


圖 3. ϵ_s 與深度比(depth ratio)之關係

根據前述推導之結果，圖 4 顯示某 $\alpha > \alpha_{0max}$ 之梁配筋量，與極限狀態 ϵ_s 於 $0.004 \leq \epsilon_s \leq 0.01$ 之關係，圖中 A_{st} 為總拉力筋用量 ($A_{st} = A_{st1} + A_{st2}$)。圖 4 清楚顯示，在設計彎矩 M_u 不變的情形下， $\epsilon_s = 0.005$ 可得最小總鋼筋用量 ($A_s = A_{st1} + A_{st2} + A_{sc}$)。又由圖 4 可知，在 $0.004 \leq \epsilon_s \leq 0.005$ 區間內， $A_{st2} + A_{sc}$ 亦呈現遞減之趨勢。圖 5 顯示某 $\alpha < \alpha_{0max}$ 之梁配筋量，與極限狀態 ϵ_s 於 $0.004 \leq \epsilon_s \leq 0.01$ 之關係。同樣地， $\epsilon_s = 0.005$ 可得最小總配筋量，但因 $\alpha < \alpha_{0max}$ ，因此在 $0.004 \leq \epsilon_s \leq 0.005$ 區間內， $A_{st2} + A_{sc}$ 呈現遞增之趨勢。

由於 ϵ_s 越大，代表越佳的耐震性能，且因 $\epsilon_s = 0.005$ 可得最小總鋼筋用量，因此不建議工程師採用極限狀態時 $0.004 \leq \epsilon_s < 0.005$ 之設計，因為此範圍之 ϵ_s ，相較於 $\epsilon_s = 0.005$ ，不但得使用較多的鋼筋，且得較差變形能力的斷面。當 $\epsilon_s > 0.005$ 時，越高的 ϵ_s (越佳的耐震性能)，需要越高的總鋼筋用量方能達成。

本研究假設壓力筋於極限狀態降伏。壓力筋之降伏與否，只對 A_{sc} 之用量造成影響，在 $\epsilon_s \leq 0.005$ 之情況下，因為壓力筋不降伏而造成之壓力筋用量提升，在一般情況下並不會改變 A_{sc} 之用量與 ϵ_s 之關係，而在 $\epsilon_s \geq 0.005$ 之區域則會使原就遞增之結果更加顯著。

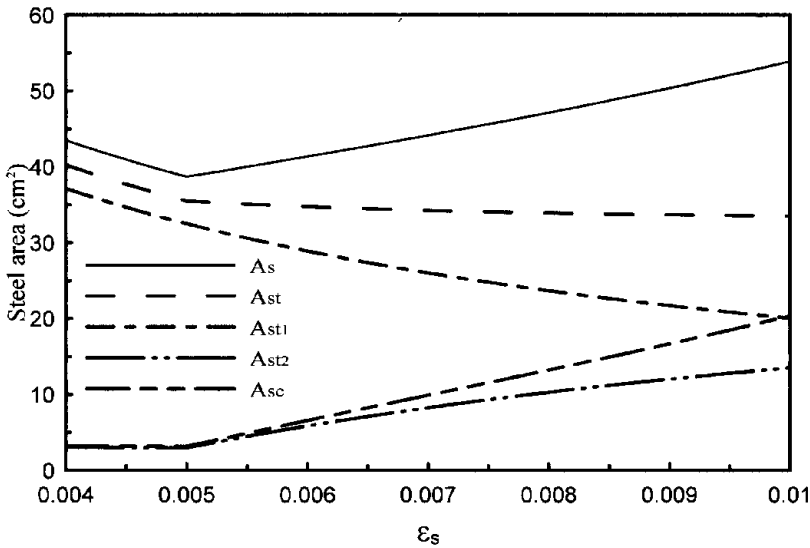


圖 4. 一梁 ϵ_s 與鋼筋用量之關係

($b=30\text{cm}$ 、 $d=60\text{cm}$ 、 $d'=7\text{cm}$ 、 $f'_c = 280\text{ kgf/cm}^2$ 、 $f_y = 4200\text{ kgf/cm}^2$ 、 $M_u = 68\text{ tf-m}$)

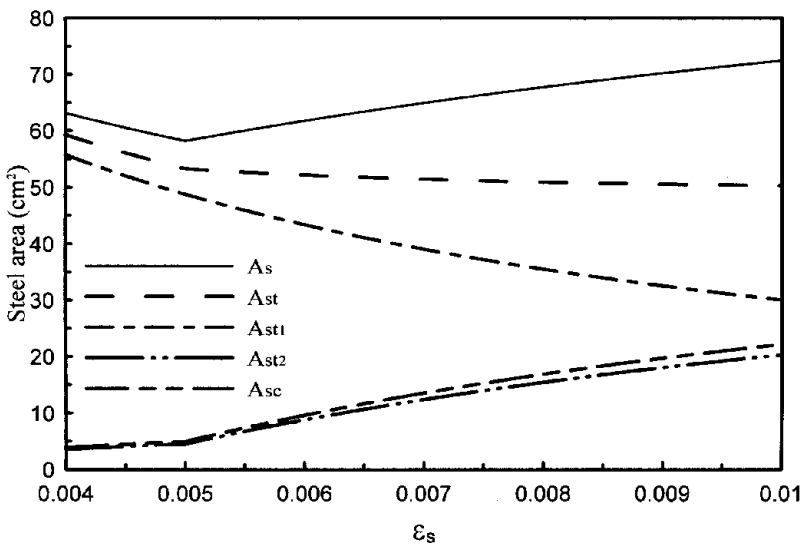


圖 5. 一梁 ϵ_s 與鋼筋用量之關係

($b=30\text{cm}$ 、 $d=60\text{cm}$ 、 $d'=7\text{cm}$ 、 $f'_c = 280\text{ kgf/cm}^2$ 、 $f_y = 2800\text{ kgf/cm}^2$ 、 $M_u = 68\text{ tf-m}$)

3. 耐震設計拉力筋上限與設計方法

3.1 拉力筋用量之上限

現行規範[1]之耐震設計之特別規定篇，針對梁之縱向鋼筋，規定拉力鋼筋比不得大於 $(f'_c + 100) / 4f_y$ ，亦不得大於 0.025。前者為確保梁有足夠韌性，後者為確保拉力筋之使用

量不致於過多而影響施工性。表 2 列出不同 f'_c 與 f_y 組合下，符合前述規定之最大拉力筋之值。如 2.2.3 節所述，在設計彎矩 M_u 不變的情形下， $\varepsilon_s = 0.005$ 可得最小總鋼筋用量，若滿足 $\alpha > \alpha_{0max}$ ，則可以更有效率地使用 M_{n2} 之鋼筋 ($A_{st2} + A_{sc}$)，因此本研究針對 $\varepsilon_s = 0.005$ ，就前述拉力筋上限進行深入探討。

吾人可將式(13)除以有效斷面積 bd ，可得第一部分彎矩 M_{n1} 的拉力筋比 ρ_{t1} ，如下式所示。

$$\rho_{t1} = \frac{A_{st1}}{bd} = \frac{0.003\beta_1 0.85f'_c}{f_y(0.003 + \varepsilon_s)} \quad (31)$$

若將 $\varepsilon_s = 0.005$ 代入式(31)，可得以極限狀態下 $\varepsilon_s = 0.005$ 作設計時， M_{n1} 所需之拉力鋼筋比 ρ_{t1} ，計算結果如表 3 所示。對照表 2 與表 3，吾人可發現，當 $f'_c = 210 \text{ kgf/cm}^2$ ，以及當

$$\rho_{t2} = \frac{A_{st2}}{bd} = \frac{0.003d\beta_1 0.85f'_c}{0.003 + 0.005} \left(1 - \frac{0.003\beta_1}{2(0.003 + 0.005)} \right) \frac{\alpha - 0.9}{0.9} \frac{1}{f_y(d-d')} \quad (33)$$

假設 $d-d' = 0.8d$ ，令 $\alpha = \alpha_{0max}$ (表 1)，則針對不同材料組合，可解得配置完 M_{n1} 後，進一步以配置 M_{n2} 為手段使斷面符合設計彎矩強度需求 ($\alpha = \alpha_{0max}$)，所需之拉力鋼筋比 ρ_{t2} 數值，表 4 顯示將其與前述 M_{n1} 所需之拉力鋼筋比 ρ_{t1} 相加所得之總拉力筋比，若所配置的總拉力筋比等於或大於表 4 之值並配置 M_{n2} 中所需之壓力筋，則滿足 $\alpha \geq \alpha_{0max}$ (除非 $d-d' < 0.8d$ ，但一般 $d-d' \geq 0.8d$)，

$f_y = 4200 \text{ kgf/cm}^2$ 與 $f'_c \leq 420 \text{ kgf/cm}^2$ 時， M_{n1} 所需之 ρ_{t1} 小於耐震設計最大拉力筋比限制。意即針對前述材料組合，規範允許斷面極限狀態下 $\varepsilon_s = 0.005$ 。至於其他材料組合，滿足 $\varepsilon_s = 0.005$ 所需的拉力筋用量皆超過最大拉力筋限制，由表 3 可知，這些材料組合之拉力筋最大鋼筋比皆為 0.025，如前所述，最大鋼筋比 0.025 之規定是為確保鋼筋不致於過多而影響施工性，換言之，為滿足施工性需求，這些材料組合得使用 $\varepsilon_s > 0.005$ 之設計。

M_{n1} 配置完成後再進一步配置 M_{n2} ，令式(1)等於式(10)，且代入 $\phi = 0.9$ ，解 M_{n2} 可得

$$M_{n2} = \frac{0.003d^2\beta_1 0.85f'_c}{0.003 + 0.005} \left(1 - \frac{0.003\beta_1}{2(0.003 + 0.005)} \right) \frac{\alpha - 0.9}{0.9} \quad (32)$$

代入式(14)，可解得 M_{n2} 之拉力筋比 ρ_{t2} 為

如前所述，此代表選擇 $\varepsilon_s = 0.005$ 可得最小鋼筋總用量，且可最有效率地使用 M_{n2} 之鋼筋，若不滿足 $\alpha \geq \alpha_{0max}$ 則仍意謂 $\varepsilon_s = 0.005$ 可得最小鋼筋總用量。進一步比較表 4 與表 2 可發現，使用 $f_y = 4200 \text{ kgf/cm}^2$ ，搭配 $f'_c \leq 350 \text{ kgf/cm}^2$ ，可滿足斷面最大拉力筋用量之限制。值得注意的是，前述同時滿足 $\alpha \geq \alpha_{0max}$ 以及最大拉力筋用量限制的材料組合，為目前設計實務之材料強度主流。

表 2 拉力筋最大鋼筋比限制

	f'_c (kgf/cm ²)					
f_y (kgf/cm ²)	210	280	350	420	490	560
2800	0.025	0.025	0.025	0.025	0.025	0.025
4200	0.018	0.023	0.025	0.025	0.025	0.025

表 3 $\varepsilon_s = 0.005$ 時平衡斷面壓力所需拉力筋鋼筋比

	f'_c (kgf/cm ²)					
f_y (kgf/cm ²)	210	280	350	420	490	560
2800	0.020	0.027	0.032	0.036	0.039	0.041
4200	0.014	0.018	0.021	0.024	0.026	0.028

灰色代表滿足拉力筋最大鋼筋比限制 (表 2)

表 4 $\varepsilon_s = 0.005$ 時 $\alpha = \alpha_{0max}$ 所需配置之總拉力筋鋼筋比

	f'_c (kgf/cm ²)					
f_y (kgf/cm ²)	210	280	350	420	490	560
2800	0.028	0.038	0.046	0.053	0.059	0.064
4200	0.015	0.019	0.023	0.027	0.030	0.033

灰色代表滿足拉力筋最大鋼筋比限制 (表 2)

3.2 設計方法

針對表 3 可滿足規範最大拉力鋼筋比限制的材料組合 ($f'_c = 210$ kgf/cm²，以及當 $f_y = 4200$ kgf/cm² 與 $f'_c \leq 420$ kgf/cm² 時)，可採極限狀態下 $\varepsilon_s = 0.005$ 之設計，以得最小總鋼筋用量之結果。設計上可先採表 3 之數值配置 M_{n1} 之鋼筋，而後配置 M_{n2} 之鋼筋以滿足 M_u 之需求。至於其他材料組合，則需採極限狀態下 $\varepsilon_s > 0.005$ 之設計，在此條件下，採用越小的 ε_s 可得越小之總鋼筋用量。針對表 4 所示可進一步滿足 $\alpha \geq \alpha_{0max}$ 要求之材料組合 ($f_y = 4200$ kgf/cm²，搭配

$f'_c \leq 350$ kgf/cm²)，吾人應在規範限制之內盡量配置 M_{n2} ，使 $\alpha \geq \alpha_{0max}$ ，可得鋼筋最小總面積之設計，並滿足 M_u 之需求，且可較有效率地使用 M_{n2} 之鋼筋。不論採用前述何種設計，皆需注意拉力筋用量不可超過規範上限，若超過則需放大斷面尺寸。當 M_u 之需求滿足後，若位於可能產生塑鉸位置，尚需滿足壓力鋼筋量不得小於拉力鋼筋量之半，若不滿足，則單獨增加壓力筋以滿足之，由於拉力筋不增加，故單獨增加壓力筋會使極限狀態下 ε_s 增大並些微增加斷面彎矩強度。又由圖 4、5 可觀察得知，若在圖中增加一條 $A_{st} / 2$ 之線段，則此新增之線段與 A_{sc} 線段之差異，即是壓力筋需要再額外增加的用量。觀察圖形之趨勢變

化，可知在 $0.004 \leq \varepsilon_s \leq 0.005$ 區間內， A_{sr} 用量隨 ε_s 增加而顯著下降，因此採 $\varepsilon_s = 0.005$ 為設計，在補足額外所需的壓力鋼筋量後，仍為此 ε_s 區間內，最少總鋼筋用量。在 $\varepsilon_s > 0.005$ 之區域， A_{sr} 用量隨 ε_s 增加而呈極微幅下降，故 $\varepsilon_s = 0.005$ 之設計，在補足額外壓力鋼筋量後，仍可近似於此區間最小總鋼筋用量。

4. 結論

本研究探討雙筋矩形梁，在相同設計彎矩 M_u 與斷面尺寸下，鋼筋用量與極限狀態拉力筋應變 ε_s 之關係，獲致以下幾點主要結論。

- (1) 當 $0.004 \leq \varepsilon_s \leq 0.005$ 之間時，第一部分彎矩 M_{n1} 之鋼筋用量，隨 ε_s 之增加而遞減；若 $\alpha \leq \alpha_{0max}$ ，則第二部分彎矩 M_{n2} 之鋼筋用量，隨 ε_s 增加而遞增或先遞增而後遞減；若 $\alpha > \alpha_{0max}$ ，則 M_{n2} 之鋼筋用量隨 ε_s 增加而遞減。總鋼筋用量恆隨 ε_s 增加而遞減。
- (2) 當 $\varepsilon_s \geq 0.005$ 時，隨著 ε_s 之增加， M_{n1} 與 M_{n2} 之鋼筋用量分別呈遞減與遞增之趨勢。總鋼筋用量隨 ε_s 之增加而遞增。拉力筋總用量隨 ε_s 之增加先遞減而後遞增；壓力筋用量則呈現恆遞增之趨勢。
- (3) 相較於 $0.004 \leq \varepsilon_s < 0.005$ 時之設計， $\varepsilon_s = 0.005$ 之設計不但可有較低的總鋼筋用量，且有較佳的斷面變形能力，因此不建議採用 $0.004 \leq \varepsilon_s < 0.005$ 之設計。至於 $\varepsilon_s > 0.005$ 之設計雖可能需配置更多的鋼筋(主要為壓力筋)，但可得更佳之斷面變形能力，其中取舍應由工程師視個

案需求認定。當 $f'_c = 210 \text{ kgf/cm}^2$ ，以及當 $f_y = 4200 \text{ kgf/cm}^2$ 與 $f'_c \leq 420 \text{ kgf/cm}^2$ 時， $\varepsilon_s = 0.005$ 之設計可滿足耐震設計規範最大拉力筋比上限之規定。當 $f_y = 4200 \text{ kgf/cm}^2$ ，搭配 $f'_c \leq 350 \text{ kgf/cm}^2$ 時，可進一步滿足 $\alpha > \alpha_{0max}$ 之要求，可更有效率的使用 M_{n2} 之鋼筋。

致謝

本研究承蒙國立台灣科技大學邁向頂尖大學計畫提供研究經費，特此致謝。

參考文獻

1. 內政部營建署，(2011)。「混凝土結構設計規範」。
2. 王麒麟，(1986)。「鋼筋混凝土學」，修訂版，九樺出版社。
3. Wang, C. K., Salmon, C. G., and Pincheira J. A. (2007). *Reinforced concrete design*, 6th edition. John Wiley & Sons, Inc.
4. Wight, J. K., and MacGregor, J. G. (2008). *Reinforced concrete: mechanics and design*. 5th edition, Prentice Hall.
5. Whitney, C. (1937). "Design of reinforced concrete members under flexure or combined flexure and direct compression," *ACI Journal Proceedings*, Vol. 8, No.4, 483-498.

鋼筋混凝土梁撓曲極限狀態拉力筋應變與縱向鋼筋用量之關係

杜昱石¹、歐昱辰²

摘要

本文依循混凝土結構設計規範之撓曲分析方法，探討鋼筋混凝土雙筋梁，在相同設計彎矩與斷面尺寸下，撓曲極限狀態拉力筋應變與鋼筋用量之關係。研究結果闡釋拉力筋與壓力筋用量，隨極限狀態拉力筋應變變化而改變之趨勢。根據所呈現之趨勢，本研究發現，當極限狀態下，相較於介於 0.004 至小於 0.005 範圍之其他應變值，採用拉力筋應變為 0.005 之設計可得最小總鋼筋使用量，並得最佳斷面變形能力。若拉力筋應變大於 0.005，斷面極限狀態變形能力隨著應變之增加而增加，但總鋼筋量也可能隨之增加。本研究並探討耐震設計拉力筋用量上限條款與前述結論之關係，最終提出滿足規範之拉壓力筋配置辦法。

關鍵字：鋼筋混凝土梁、撓曲極限狀態、拉力筋應變、縱向鋼筋用量、耐震設計

¹國立台灣科技大學營建工程系大學部學生

²國立台灣科技大學營建工程系副教授

1. 前言

根據現行混凝土結構設計規範[1]，為確保梁於撓曲極限狀態下有足夠韌性，因此規定極限狀態時最外受拉鋼筋之淨拉應變 ε_t ，不得小於0.004。又規範[1]規定，當 ε_t 大於0.005時，屬拉力控制斷面，極限狀態時韌性較佳，因此採用較高之強度折減係數($\phi = 0.9$)。當 ε_t 介於0.005至鋼筋降伏應變之間時，屬過渡斷面，極限狀態時韌性較差，因此 ϕ 值隨著 ε_t 之減少，由0.005線性遞減至由螺箍筋之0.7或其他情形之0.65。

對一 ε_t 介於0.004至0.005的梁而言，在撓曲極限狀態下， ε_t 越小，梁斷面所能提供的計算彎矩強度 M_n 越大，因為混凝土壓力區較大，能提供較大的壓合力，因此容許較大之拉力區合力，導致較高之 M_n 。但 ε_t 越小， ϕ 值越低，在須維持一定量之設計強度 M_u 下，可能會需要更高之 M_n 。又 ε_t 低代表韌性低。另一方面來說， ε_t 越大，梁斷面所能提供的 M_n 就越少，然而 ϕ 值較高，在需維持一定量之 M_u 下，所需的 M_n 可能較低，且韌性較高。因 M_u 和 M_n 之間，有一 ϕ 值之作用， ϕ 值與 ε_t 成正相關，但 M_n 與 ε_t 呈負相關，又 M_n 與材料強度及用量有關，在上述原理綜合作用下，想要直接看出在 M_u 以及斷面尺寸與材料強度固定下， ε_t 與成本指標“鋼筋用量”之變化關係實屬不易。本研究依據規範之分析與設計方法，透過數學推導，以明確的原理原則來闡述 ε_t 與鋼筋用量之變化關係。工程師透過此關係可瞭解 ε_t 變化所導致的鋼筋用量的改變，並瞭解極限狀態下採用 ε_t 小於0.005是否有機會可以減少鋼筋用量。

許多文獻[2-4]均指出，雙筋設計有諸多優點，例如壓力筋可減少梁因潛變與乾縮造成之長期撓度；可與拉力筋形成另一力學機制，產生更高的彎矩強度；壓力筋可支撐並錨定箍筋。就耐震設計而言，壓力筋的使用可增加斷面曲率韌性，因此規範[1]於耐震設計篇中，特別規定於梁柱交接面及其它可能產生塑鉸位置，壓力鋼筋量不得小於拉力鋼筋量之半，所以實務上梁多採雙筋配置，因此本研究針對雙筋梁進行探討。又實務上梁多採矩形設計，因此本研究之對象為矩形梁。

2. 固定設計彎矩強度下配筋量理論推導

2.1 推導過程中之基本假設

本研究對象為雙筋矩形梁，斷面基本尺寸之定義如圖 1 所示：其中 d' 為梁最外受壓纖維至受壓鋼筋形心之距離；有效梁深 d 為梁最外受壓纖維至受拉鋼筋形心之距離； b 為梁寬； h 為梁全深。為簡化推導，拉壓力筋採單排配置，此與目前實務傾向於採單排配置，使用較少數目之大號鋼筋之潮流符合。因此 ε_t 等於拉力形心位置應變 ε_s 。梁斷面達極限狀態時，混凝土壓應力之分佈假設可由 Whitney 等值應力塊[5]描述。鋼筋應力應變行為假設為理想彈塑性，意即鋼筋降伏後應力維持定值。

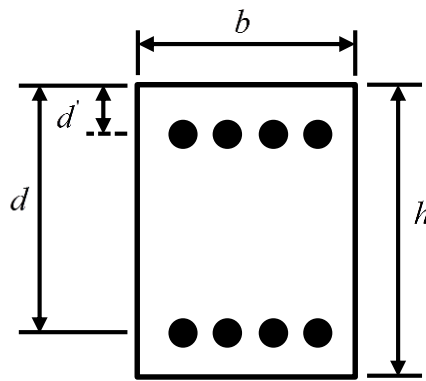


圖 1. 斷面基本尺寸定義

本研究將計算彎矩強度 M_n 分為 M_{n1} 與 M_{n2} 兩部份，其中 M_{n1} 為混凝土壓力區合力與相平衡之拉力筋合力所提供之彎矩強度（圖 2(a)）； M_{n2} 為壓力筋與相平衡之拉力筋合力所提供之彎矩強度（圖 2(b)）。 M_u 與 M_{n1} 以及 M_{n2} 之關係如式(1)所示。

$$M_u = \phi M_n = \phi(M_{n1} + M_{n2}) \quad (1)$$

透過變形諧和，極限狀態下壓力筋之應變 ε_{sc} 可由式(2)求得。

$$\varepsilon_{sc} = 0.003 - \frac{0.003 + \varepsilon_s}{d} \times d' \quad (2)$$

本研究將壓力筋配置在斷面極限狀態下仍能降伏之處，故 $\varepsilon_{sc} \geq \varepsilon_y$ ，代入此條件，可得

$$\frac{d'}{d} \leq \frac{0.003 - \varepsilon_y}{0.003 + \varepsilon_s} \quad (3)$$

若 d'/d 滿足式(3)之限制，則可確保極限狀態下壓力鋼筋降伏。

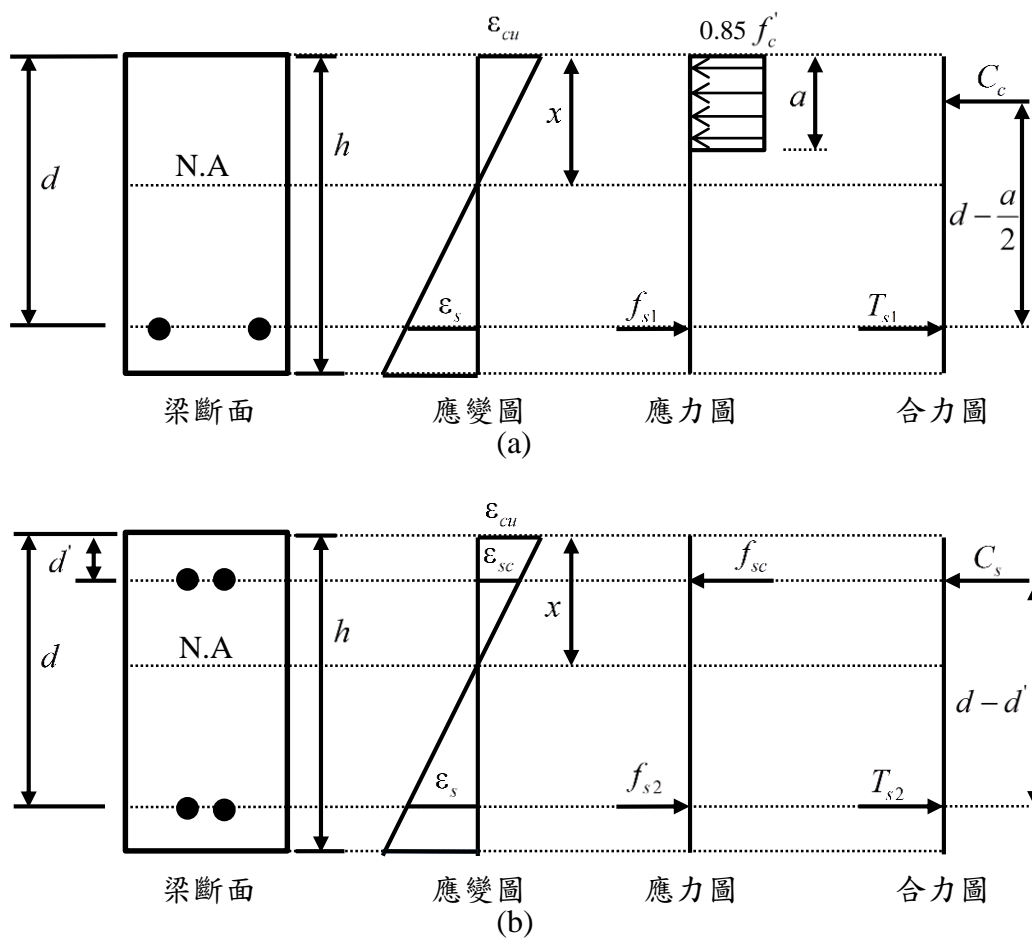


圖 2. (a) M_{n1} ; (b) M_{n2}

2.2 極限狀態下拉力筋形心位置應變介於 0.004 至 0.005

2.2.1 彎矩強度

透過變形諧和，極限狀態下中性軸深度 x 為

$$x = \frac{0.003d}{0.003 + \varepsilon_s} \quad (4)$$

Whitney 等值應力塊深度 a 為

$$a = x\beta_1 = \frac{0.003d\beta_1}{0.003 + \varepsilon_s} \quad (5)$$

其中若 $f_c' \leq 280 \text{ kgf/cm}^2$ ， β_1 為 0.85，若 $f_c' > 280 \text{ kgf/cm}^2$ ，每增加 70 kgf/cm^2 ， β_1 值

減少 0.05，但 $\beta_1 \geq 0.65$ 。混凝土壓力區合力為

$$C_c = 0.85 f_c' ab = 0.85 f_c' \frac{0.003bd\beta_1}{0.003 + \varepsilon_s} \quad (6)$$

對相對應拉力筋形心取彎矩，可得 M_{n1} 。

$$M_{n1} = C_c \left(d - \frac{a}{2} \right) = \frac{0.00255bd^2\beta_1 f_c'}{0.003 + \varepsilon_s} \left(1 - \frac{0.003\beta_1}{2(0.003 + \varepsilon_s)} \right) \quad (7)$$

M_{n1} 之計算如圖 2(a)所示。 M_{n2} 與 M_u 之關係如下式所示。

$$M_{n2} = \frac{M_u}{\phi} - M_{n1} \quad (8)$$

其中 ϕ 值與 $\varepsilon_s (= \varepsilon_t)$ 之關係可由式(9)表達[1]。

$$\phi = \frac{0.9 - 0.65}{0.005 - \varepsilon_y} (\varepsilon_s - \varepsilon_y) + 0.65 = \frac{0.025\varepsilon_s - 0.9\varepsilon_y + \frac{13}{4000}}{0.005 - \varepsilon_y} \quad (9)$$

為後續推導需要以及表達設計彎矩強度具有大小，吾人可將 M_u 表達成 $\varepsilon_s = 0.005$ 之 M_{n1} 的倍數，如下式所示。

$$M_u = \alpha M_{n1} \quad (M_{n1} \text{ 之中的 } \varepsilon_s = 0.005) \quad (10)$$

將式(7)取 $\varepsilon_s = 0.005$ 代入式(10)可得

$$M_u = \alpha \frac{0.00255bd^2 f_c' (0.016 - 0.003\beta_1)}{0.008 \times 0.016} \quad (11)$$

將式(9)、式(7)與式(11)代入式(8)可得

$$M_{n2} = \alpha \frac{0.00255bd^2 f_c' (0.016 - 0.003\beta_1)}{0.008 \times 0.016} \times \frac{0.005 - \varepsilon_y}{0.25\varepsilon_s - 0.9\varepsilon_y + \frac{13}{4000}} - \frac{0.00255bd^2 f_c'}{0.003 + \varepsilon_s} \left(1 - \frac{0.003\beta_1}{2(0.003 + \varepsilon_s)} \right) \quad (12)$$

2.2.2 配筋量

M_{n1} 中平衡混凝土壓力所需之拉力筋用量 A_{st1} ，為壓力區合力 C_c （式(6)）除以拉力筋降伏強度 f_y 。

$$A_{st1} = \frac{C_c}{f_y} = \frac{0.00255bd\beta_1f_c'}{f_y(0.003 + \varepsilon_s)} \quad (13)$$

M_{n2} 可由第二部份彎矩之拉力筋合力，或壓力筋合力，乘上拉壓力筋合力之距離而求得。

$$M_{n2} = A_{st2}f_y(d - d') = A_{sc}(f_y - 0.85f_c')(d - d') \quad (14)$$

其中 A_{st2} 為 M_{n2} 之拉力筋面積； A_{sc} 為 M_{n2} 之壓力筋面積。上式移項整理可得 A_{st2} 與 A_{sc} 。

$$A_{st2} = \frac{M_{n2}}{f_y(d - d')} \quad (15)$$

$$A_{sc} = \frac{M_{n2}}{(f_y - 0.85f_c')(d - d')} \quad (16)$$

2.2.3 配筋量與拉力筋形心位置應變之關係

透過 A_{st1} (式(13)) 對 ε_s 之微分，可觀察 A_{st1} 與 ε_s 之間的關係，如下式所示。

$$\frac{dA_{st1}}{d\varepsilon_s} = \frac{d}{d\varepsilon_s} \left(\frac{0.00255bd\beta_1f_c'}{f_y(0.003 + \varepsilon_s)} \right) = -\frac{0.00255bd\beta_1f_c'}{f_y(0.003 + \varepsilon_s)^2} \quad (17)$$

由上式可發現，在 ε_s 可能的範圍內， A_{st1} 對 ε_s 之微分皆為負值，即 ε_s 越大， A_{st1} 用量越小。物理意義的解釋為，當 ε_s 越大，混凝土壓力區深度越小，混凝土壓合力越小，因此用來與混凝土壓合力平衡的拉力筋用量隨之減少。接著，透過 $A_{st2} + A_{sc}$ (式(15)+式(16)) 對 ε_s 之微分，可觀察 M_{n2} 鋼筋用量與 ε_s 之間的關係，如下式所示。

$$\frac{d(A_{st2} + A_{sc})}{d\varepsilon_s} = \frac{d}{d\varepsilon_s} \left[\frac{M_{n2}}{f_y(d - d')} + \frac{M_{n2}}{(f_y - 0.85f_c')(d - d')} \right] \quad (18)$$

上式提出常數項

$$\frac{d(A_{st2} + A_{sc})}{d\varepsilon_s} = \left[\frac{1}{f_y(d-d')} + \frac{1}{(f_y - 0.85f'_c)(d-d')} \right] \frac{dM_{n2}}{d\varepsilon_s} \quad (19)$$

上式可知 $A_{st2} + A_{sc}$ 對 ε_s 之微分正比於 M_{n2} 對 ε_s 之微分。 M_{n2} 如式(12)所示，將其對 ε_s 微分，並加以整理可得。

$$\frac{dM_{n2}}{d\varepsilon_s} = 0.003bd^2\beta_1 0.85f'_c \left[-\frac{0.25\alpha(0.016 - 0.003\beta_1)(0.005 - \varepsilon_y)}{0.008 \times 0.016 \left(0.25\varepsilon_s - 0.9\varepsilon_y + \frac{13}{4000} \right)^2} + \frac{0.003 + \varepsilon_s - 0.003\beta_1}{(0.003 + \varepsilon_s)^3} \right] \quad (20)$$

觀察上式右側括弧內部分，可發現當 α 值越大，括弧之值越小，若想得負斜率之結果，則可令中括弧為零，求解 α_0 ，可得下式。

$$\alpha_0 = \frac{0.003 + \varepsilon_s - 0.003\beta_1}{(0.003 + \varepsilon_s)^3} \times \frac{0.008 \times 0.016 \left(0.25\varepsilon_s - 0.9\varepsilon_y + \frac{13}{4000} \right)^2}{0.25(0.016 - 0.003\beta_1)(0.005 - \varepsilon_y)} \quad (21)$$

觀察式(21)可知，其中變數有 ε_s 、 β_1 、 ε_y ，若給定一組 β_1 與 ε_y 值，則 α_0 隨 ε_s 而變化。表 1 顯示在 $0.004 \leq \varepsilon_s \leq 0.005$ 區間內，在不同的 β_1 與 ε_y 值組合下， α_0 隨 ε_s 變化之最大值 α_{0max} 。

表 1. α_{0max}

	f'_c (kgf/cm ²)	210	280	350	420	490	560
	β_1	0.85	0.85	0.8	0.75	0.7	0.65
f_y (kgf/cm ²)	ε_y	α_{0max}					
2800	0.001373	1.237	1.237	1.265	1.292	1.318	1.344
4200	0.002059	0.966	0.966	0.986	1.007	1.028	1.048

表 1 之意義在於，若 $\alpha > \alpha_{0max}$ ，意即 $M_u > \alpha_{0max} M_{n1}(\varepsilon_s = 0.005)$ ，可得在 $0.004 \leq \varepsilon_s \leq 0.005$ 區間內，式(20)為負值，意即 M_{n2} 隨 ε_s 增加而遞減，而由式(19)可知，鋼筋用量 $A_{st2} + A_{sc}$

將隨 ε_s 增加而遞減。若 $\alpha \leq \alpha_{0max}$ ，則 $A_{st2} + A_{sc}$ 將隨 ε_s 增加而遞增或先遞增而後遞減。

至於總鋼筋用量 $A_{st1} + A_{st2} + A_{sc}$ 對 ε_s 之微分可將式(17)與式(19)相加而得

$$\frac{d(A_{st1} + A_{st2} + A_{sc1})}{d\varepsilon_s} = -\frac{0.003bd\beta_1 0.85f'_c}{f_y(0.003 + \varepsilon_s)^2} + \left[\frac{1}{f_y(d-d')} + \frac{1}{(f_y - 0.85f'_c)(d-d')} \right] \frac{dM_{n2}}{d\varepsilon_s} \quad (22)$$

其中 $dM_{n2}/d\varepsilon_s$ 結果如式(20)所示。在可能的材料強度、斷面設計參數以及 α 值之範圍內，式(22)皆為負值。此意謂總鋼筋用量隨著 ε_s 增加而遞減。

眾所周知，極限狀態下 ε_s 越高，代表斷面極限曲率越高，一般代表斷面擁有越佳的變形能力，有益於耐震性能。本節之推導顯示，在相同的設計彎矩強度 M_u 的條件下，於設計時採用 $\varepsilon_s = 0.005$ ，比起其他 ε_s 值 ($0.004 \leq \varepsilon_s < 0.005$)，不但有較佳的耐震性能（較大之 ε_s 值），且使用較少的總鋼筋用量（較小之 $A_{st1} + A_{st2} + A_{sc}$ 值）。若進一步滿足 $\alpha > \alpha_{0max}$ ，則無論 A_{st1} 或 $A_{st2} + A_{sc}$ 皆隨 ε_s 增加而呈遞減趨勢，代表更有效率地使用鋼筋材料。

2.3 極限狀態下拉力筋形心位置應變大於或等於 0.005

2.3.1 彎矩強度

當 $\varepsilon_s \geq 0.005$ 時， $\phi = 0.9$ ， M_{n1} 之表示式，如式(7)所示。將 $\phi = 0.9$ 代入式(8)，再按式(10)至式(12)之推導方式，可得 M_{n2} ，如下式所示。

$$M_{n2} = \alpha \frac{0.003bd^2\beta_1 0.85f'_c(0.016 - 0.003\beta_1)}{0.008 \times 0.016 \times 0.9} - \frac{0.003bd^2\beta_1 0.85f'_c}{0.003 + \varepsilon_s} \left(1 - \frac{0.003\beta_1}{2(0.003 + \varepsilon_s)} \right) \quad (23)$$

由於 M_u 與 ϕ 為定值，式(1)對 ε_s 微分可得下式。

$$\frac{dM_u}{d\varepsilon_s} = 0 = \phi \left(\frac{dM_{n1}}{d\varepsilon_s} + \frac{dM_{n2}}{d\varepsilon_s} \right) \quad (24)$$

式(7)對 ε_s 微分可得 $\frac{dM_{n1}}{d\varepsilon_s}$ ，如下所示。

$$\frac{dM_{n1}}{d\varepsilon_s} = -\frac{0.003bd^2\beta_1 0.85f'_c}{(0.003 + \varepsilon_s)^2} \left(1 - \frac{0.003\beta_1}{0.003 + \varepsilon_s}\right) \quad (25)$$

代入式(24)可得 $\frac{dM_{n2}}{d\varepsilon_s}$

$$\frac{dM_{n2}}{d\varepsilon_s} = -\frac{dM_{n1}}{d\varepsilon_s} = \frac{0.00255bd^2\beta_1 f'_c}{(0.003 + \varepsilon_s)^2} \left(1 - \frac{0.003\beta_1}{0.003 + \varepsilon_s}\right) \quad (26)$$

由式(25)與式(26)，吾人可以清楚的觀察到，隨著 ε_s 的增加， M_{n1} 隨之遞減，但 M_{n2} 隨之遞增。 M_{n2} 遞增乃因 ϕ 值為常數(0.9)，因此當 M_{n1} 越小， M_{n2} 則需提高，以維持相同的 M_u 。

2.3.2 配筋量

鋼筋用量 A_{st1} 可由式(13)計算而得。 A_{st2} 與 A_{sc} 則可分別由式(15)與式(16)求得，式中 M_{n2} 則由式(23)計算之。

2.3.3 配筋量與拉力形心位置應變之關係

A_{st1} 對 ε_s 之微分結果同式(17)，因此 A_{st1} 對 ε_s 之關係如前所述，即 ε_s 越大、 A_{st1} 用量越小。 $A_{st2} + A_{sc}$ 對 ε_s 之微分同式(19)，其中 $dM_{n2}/d\varepsilon_s$ 結果如式(26)所示，由前述兩式可知，隨 ε_s 之增加， $A_{st2} + A_{sc}$ 用量隨之提高。總鋼筋用量 $A_{st1} + A_{st2} + A_{sc}$ 對 ε_s 之微分如式(27)所示，該式於一般材料強度範圍內為正值，代表總鋼筋用量隨 ε_s 之增加而提高。

$$\frac{d(A_{st1} + A_{st2} + A_{sc})}{d\varepsilon_s} = \frac{0.003bd\beta_1 0.85f'_c}{(0.003 + \varepsilon_s)^2} \left[-\frac{1}{f_y} + \frac{d}{d-d'} \left(1 - \frac{0.003\beta_1}{0.003 + \varepsilon_s}\right) \left(\frac{1}{f_y} + \frac{1}{f_y - 0.85f'_c}\right) \right] \quad (27)$$

因此吾人可知，當 $\varepsilon_s \geq 0.005$ ，在不改變斷面設計彎矩強度 M_u 下，欲獲取極限狀態下越高的 ε_s ，第一部分彎矩 M_{n1} 的拉力筋用量 A_{st1} 需降低；第二部分彎矩 M_{n2} 的拉壓力筋總量 $A_{st2} + A_{sc}$ 需提高；總鋼筋用量則是呈現遞增之趨勢。前述推導顯示，欲獲取越佳的耐震性能（越高的 ε_s ），需提高總鋼筋用量。

透過求取拉力筋總用量 $A_{st1} + A_{st2}$ 以及壓力筋用量 A_{sc} 對於對 ε_s 之微分，吾人可探討在不改變斷面設計彎矩強度 M_u 下，拉力筋與壓力筋用量與斷面變形能力之關係。首先求取拉力筋總用量 $A_{st1} + A_{st2}$ 對 ε_s 之微分，如下式所示。

$$\frac{d(A_{st1} + A_{st2})}{d\varepsilon_s} = -\frac{0.00255bd\beta_1 f'_c}{f_y(0.003 + \varepsilon_s)^2} \left[1 - \frac{d}{(d-d')} \left(1 - \frac{0.003\beta_1}{0.003 + \varepsilon_s} \right) \right] \quad (28)$$

觀察上式，可知當右側中括弧為正，則式(28)值為負，可得 $A_{st1} + A_{st2}$ 隨 ε_s 遞減之結果。令上式右側中括弧內為 0，可得上式正、負值之界線。

$$1 - \frac{d}{(d-d')} \left(1 - \frac{0.003\beta_1}{0.003 + \varepsilon_s} \right) = 0 \quad (29)$$

定義 $(d-d')/d$ 為深度比(depth ratio)，一般情況下此倍數範圍會介於 0.8 至 0.95 之間。透過式(29)，可求得不同 β_1 值情況下， ε_s 與深度比之關係（圖 3），此關係代表某深度比之下，拉力筋總量呈遞減趨勢之極限 ε_s ；意即斷面深度比不變，當 ε_s 由 0.005 增大時，拉力筋總用量之趨勢為遞減，直到 ε_s 增加到圖 3 之曲線所對應的值，當 ε_s 超過圖 3 曲線所對應之值，則拉力筋總用量轉為遞增。

壓力筋用量 A_{sc} 對於對 ε_s 之微分如下式所示。

$$\frac{dA_{sc}}{d\varepsilon_s} = \left[\frac{1}{(f_y - 0.85f'_c)(d-d')} \right] \frac{dM_{n2}}{d\varepsilon_s} \quad (30)$$

其中 $\frac{dM_{n2}}{d\varepsilon_s}$ 如式(26)所示。因式(26)恆為正值，所以壓力筋用量隨著 ε_s 之增加，恆為遞增。

前述推導顯示，在相同的設計彎矩強度下，欲提高斷面的變形能力，則需提高壓力筋用量，至於拉力筋的用量則需先減少而後增加。

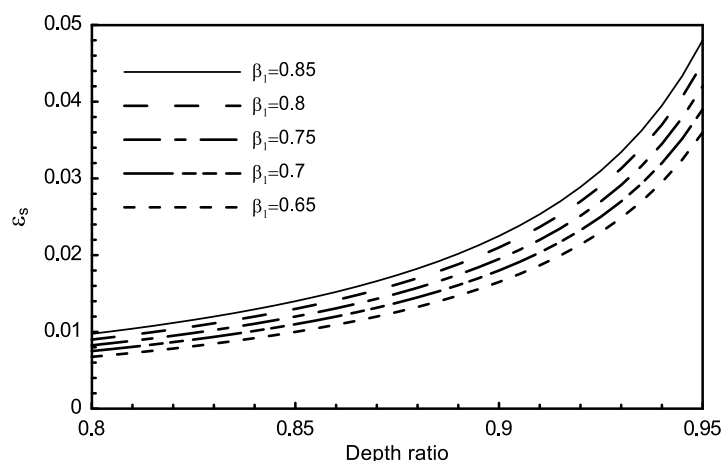


圖 3. ε_s 與深度比(depth ratio)之關係

根據前述推導之結果，圖 4 顯示某 $\alpha > \alpha_{0max}$ 之梁配筋量，與極限狀態 ε_s 於 $0.004 \leq \varepsilon_s \leq 0.01$ 之關係，圖中 A_{st} 為總拉力筋用量 ($A_{st} = A_{st1} + A_{st2}$)。圖 4 清楚顯示，在設計彎矩 M_u 不變的情形下， $\varepsilon_s = 0.005$ 可得最小總鋼筋用量 ($A_s = A_{st1} + A_{st2} + A_{sc}$)。又由圖 4 可知，在 $0.004 \leq \varepsilon_s \leq 0.005$ 區間內， $A_{st2} + A_{sc}$ 亦呈現遞減之趨勢。圖 5 顯示某 $\alpha < \alpha_{0max}$ 之梁配筋量，與極限狀態 ε_s 於 $0.004 \leq \varepsilon_s \leq 0.01$ 之關係。同樣地， $\varepsilon_s = 0.005$ 可得最小總配筋量，但因 $\alpha < \alpha_{0max}$ ，因此在 $0.004 \leq \varepsilon_s \leq 0.005$ 區間內， $A_{st2} + A_{sc}$ 呈現遞增之趨勢。

由於 ε_s 越大，代表越佳的耐震性能，且因 $\varepsilon_s = 0.005$ 可得最小總鋼筋用量，因此不建議工程師採用極限狀態時 $0.004 \leq \varepsilon_s < 0.005$ 之設計，因為此範圍之 ε_s ，相較於 $\varepsilon_s = 0.005$ ，不但得使用較多的鋼筋，且得較差變形能力的斷面。當 $\varepsilon_s > 0.005$ 時，越高的 ε_s （越佳的耐震性能），需要越高的總鋼筋用量方能達成。

本研究假設壓力筋於極限狀態降伏。壓力筋之降伏與否，只對 A_{sc} 之用量造成影響，在 $\varepsilon_s \leq 0.005$ 之情況下，因為壓力筋不降伏而造成之壓力筋用量提升，在一般情況下並不會改變 A_{sc} 之用量與 ε_s 之關係，而在 $\varepsilon_s \geq 0.005$ 之區域則會使原就遞增之結果更加顯著。

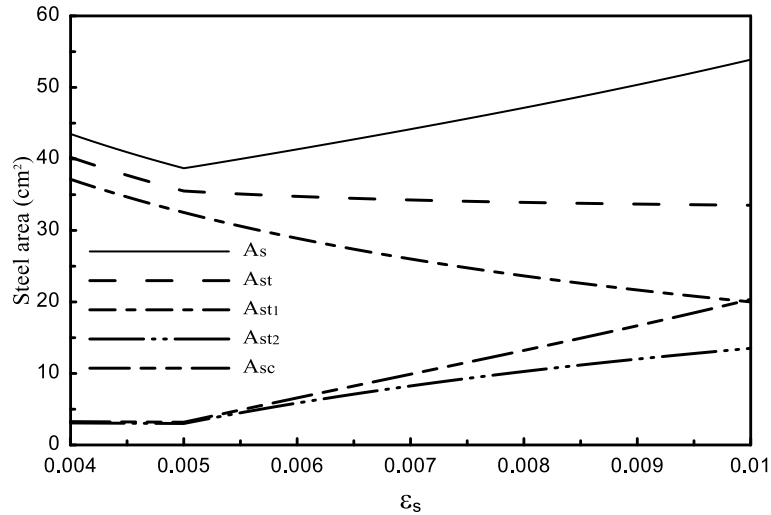


圖 4. 一梁 ϵ_s 與鋼筋用量之關係

($b=30\text{ cm}$ 、 $d=60\text{ cm}$ 、 $d' =7\text{ cm}$ 、 $f'_c = 280\text{ kgf/cm}^2$ 、 $f_y = 4200\text{ kgf/cm}^2$ 、 $M_u = 68\text{ tf-m}$)

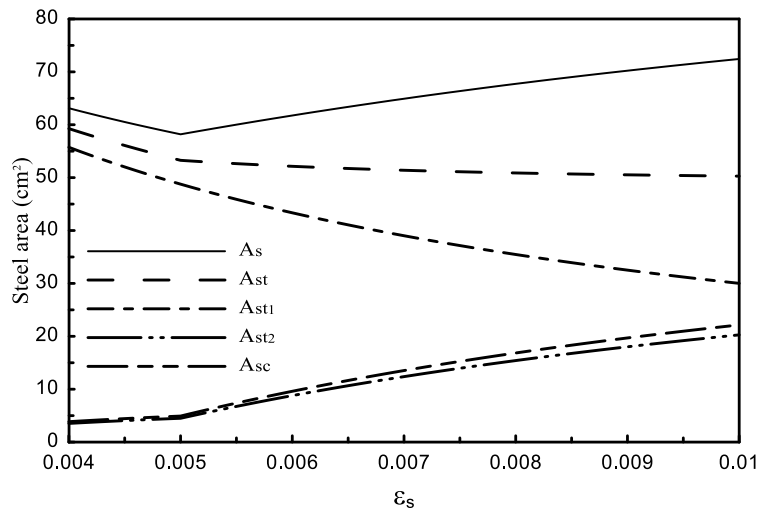


圖 5. 一梁 ϵ_s 與鋼筋用量之關係

($b=30\text{ cm}$ 、 $d=60\text{ cm}$ 、 $d' =7\text{ cm}$ 、 $f'_c = 280\text{ kgf/cm}^2$ 、 $f_y = 2800\text{ kgf/cm}^2$ 、 $M_u = 68\text{ tf-m}$)

3. 耐震設計拉力筋上限與設計方法

3.1 拉力筋用量之上限

現行規範[1]之耐震設計之特別規定篇，針對梁之縱向鋼筋，規定拉力鋼筋比不得大於 $(f'_c + 100) / 4f_y$ ，亦不得大於 0.025。前者為確保梁有足夠韌性，後者為確保拉力筋之使用量不致於過多而影響施工性。表 2 列出不同 f'_c 與 f_y 組合下，符合前述規定之最大拉力筋之值。如 2.2.3 節所述，在設計彎矩 M_u 不變的情形下， $\epsilon_s = 0.005$ 可得最小總鋼筋

用量，若滿足 $\alpha > \alpha_{0max}$ ，則可以更有效率地使用 M_{n2} 之鋼筋 ($A_{st2} + A_{sc}$)，因此本研究針對 $\varepsilon_s = 0.005$ ，就前述拉力筋上限進行深入探討。

吾人可將式(13)除以有效斷面積 bd ，可得第一部分彎矩 M_{n1} 的拉力筋比 ρ_{t1} ，如下式所示。

$$\rho_{t1} = \frac{A_{st1}}{bd} = \frac{0.003\beta_1 0.85 f'_c}{f_y (0.003 + \varepsilon_s)} \quad (31)$$

若將 $\varepsilon_s = 0.005$ 代入式(31)，可得以極限狀態下 $\varepsilon_s = 0.005$ 作設計時， M_{n1} 所需之拉力鋼筋比 ρ_{t1} ，計算結果如表 3 所示。對照表 2 與表 3，吾人可發現，當 $f'_c = 210 \text{ kgf/cm}^2$ ，以及當 $f_y = 4200 \text{ kgf/cm}^2$ 與 $f'_c \leq 420 \text{ kgf/cm}^2$ 時， M_{n1} 所需之 ρ_{t1} 小於耐震設計最大拉力筋比限制。意即針對前述材料組合，規範允許斷面極限狀態下 $\varepsilon_s = 0.005$ 。至於其他材料組合，滿足 $\varepsilon_s = 0.005$ 所需的拉力筋用量皆超過最大拉力筋限制，由表 3 可知，這些材料組合之拉力筋最大鋼筋比皆為 0.025，如前所述，最大鋼筋比 0.025 之規定是為確保鋼筋不致於過多而影響施工性，換言之，為滿足施工性需求，這些材料組合得使用 $\varepsilon_s > 0.005$ 之設計。

M_{n1} 配置完成後再進一步配置 M_{n2} ，令式(1)等於式(10)，且代入 $\phi = 0.9$ ，解 M_{n2} 可得

$$M_{n2} = \frac{0.003d^2\beta_1 b 0.85 f'_c}{0.003 + 0.005} \left(1 - \frac{0.003\beta_1}{2(0.003 + 0.005)} \right) \frac{\alpha - 0.9}{0.9} \quad (32)$$

代入式(14)，可解得 M_{n2} 之拉力筋比 ρ_{t2} 為

$$\rho_{t2} = \frac{A_{st2}}{bd} = \frac{0.003d\beta_1 0.85 f'_c}{0.003 + 0.005} \left(1 - \frac{0.003\beta_1}{2(0.003 + 0.005)} \right) \frac{\alpha - 0.9}{0.9} \frac{1}{f_y (d - d')} \quad (33)$$

假設 $d - d' = 0.8d$ ，令 $\alpha = \alpha_{0max}$ (表 1)，則針對不同材料組合，可解得配置完 M_{n1} 後，進一步以配置 M_{n2} 為手段使斷面符合設計彎矩強度需求 ($\alpha = \alpha_{0max}$)，所需之拉力鋼筋比 ρ_{t2} 數值，表 4 顯示將其與前述 M_{n1} 所需之拉力鋼筋比 ρ_{t1} 相加所得之總拉力筋比，若所

配置的總拉力筋比等於或大於表 4 之值並配置 M_{n2} 中所需之壓力筋，則滿足 $\alpha \geq \alpha_{0max}$ （除非 $d-d' < 0.8d$ ，但一般 $d-d' \geq 0.8d$ ），如前所述，此代表選擇 $\varepsilon_s = 0.005$ 可得最小鋼筋總用量，且可最有效率地使用 M_{n2} 之鋼筋，若不滿足 $\alpha \geq \alpha_{0max}$ 則仍意謂 $\varepsilon_s = 0.005$ 可得最小鋼筋總用量。進一步比較表 4 與表 2 可發現，使用 $f_y = 4200 \text{ kgf/cm}^2$ ，搭配 $f'_c \leq 350 \text{ kgf/cm}^2$ ，可滿足斷面最大拉力筋用量之限制。值得注意的是，前述同時滿足 $\alpha \geq \alpha_{0max}$ 以及最大拉力筋用量限制的材料組合，為目前設計實務之材料強度主流。

表 2. 拉力筋最大鋼筋比限制

	f'_c (kgf/cm ²)					
f_y (kgf/cm ²)	210	280	350	420	490	560
2800	0.025	0.025	0.025	0.025	0.025	0.025
4200	0.018	0.023	0.025	0.025	0.025	0.025

表 3. $\varepsilon_s = 0.005$ 時平衡斷面壓力所需拉力筋鋼筋比

	f'_c (kgf/cm ²)					
f_y (kgf/cm ²)	210	280	350	420	490	560
2800	0.020	0.027	0.032	0.036	0.039	0.041
4200	0.014	0.018	0.021	0.024	0.026	0.028

灰色代表滿足拉力筋最大鋼筋比限制（表 2）

表 4 $\varepsilon_s = 0.005$ 時 $\alpha = \alpha_{0max}$ 所需配置之總拉力筋鋼筋比

	f'_c (kgf/cm ²)					
f_y (kgf/cm ²)	210	280	350	420	490	560
2800	0.028	0.038	0.046	0.053	0.059	0.064
4200	0.015	0.019	0.023	0.027	0.030	0.033

灰色代表滿足拉力筋最大鋼筋比限制（表 2）

3.2 設計方法

針對表 3 可滿足規範最大拉力鋼筋比限制的材料組合（ $f'_c = 210 \text{ kgf/cm}^2$ ，以及當 $f_y = 4200 \text{ kgf/cm}^2$ 與 $f'_c \leq 420 \text{ kgf/cm}^2$ 時），可採極限狀態下 $\varepsilon_s = 0.005$ 之設計，以得最小總鋼筋用量之結果。設計上可先採表 3 之數值配置 M_{n1} 之鋼筋，而後配置 M_{n2} 之鋼筋以滿足 M_u 之需求。至於其他材料組合，則需採極限狀態下 $\varepsilon_s > 0.005$ 之設計，在此條件下，採用越小的 ε_s 可得越小之總鋼筋用量。針對表 4 所示可進一步滿足 $\alpha \geq \alpha_{0max}$ 要求之材料組合（ $f_y = 4200 \text{ kgf/cm}^2$ ，搭配 $f'_c \leq 350 \text{ kgf/cm}^2$ ），吾人應在規範限制之內盡量配置 M_{n2} ，使 $\alpha \geq \alpha_{0max}$ ，可得鋼筋最小總面積之設計，並滿足 M_u 之需求，且可較有效率地使用 M_{n2} 之鋼筋。不論採用前述何種設計，皆需注意拉力筋用量不可超過規範上限，若超過則需放大斷面尺寸。當 M_u 之需求滿足後，若位於可能產生塑鉸位置，尚需滿足壓力鋼筋量不得小於拉力鋼筋量之半，若不滿足，則單獨增加壓力筋以滿足之，由於拉力筋不增加，故單獨增加壓力筋會使極限狀態下 ε_s 增大並些微增加斷面彎矩強度。又由圖 4、5 可觀察得知，若在圖中增加一條 $A_{st}/2$ 之線段，則此新增之線段與 A_{sc} 線段之差異，即是壓力筋需要再額外增加的用量。觀察圖形之趨勢變化，可知在 $0.004 \leq \varepsilon_s \leq 0.005$ 區間內， A_{st} 用量隨 ε_s 增加而顯著下降，因此採 $\varepsilon_s = 0.005$ 為設計，在補足額外所需的壓力鋼筋量後，仍為此 ε_s 區間內，最少總鋼筋用量。在 $\varepsilon_s > 0.005$ 之區域， A_{st} 用量隨 ε_s 增加而呈極微幅下降，故 $\varepsilon_s = 0.005$ 之設計，在補足額外壓力鋼筋量後，仍可近似於此區間最小總鋼筋用量。

4. 結論

本研究探討雙筋矩形梁，在相同設計彎矩 M_u 與斷面尺寸下，鋼筋用量與極限狀態拉力筋應變 ε_s 之關係，獲致以下幾點主要結論。

- (1) 當 $0.004 \leq \varepsilon_s \leq 0.005$ 之間時，第一部分彎矩 M_{n1} 之鋼筋用量，隨 ε_s 之增加而遞減；若 $\alpha \leq \alpha_{0max}$ ，則第二部分彎矩 M_{n2} 之鋼筋用量，隨 ε_s 增加而遞增或先遞增而後遞減；若 $\alpha > \alpha_{0max}$ ，則 M_{n2} 之鋼筋用量隨 ε_s 增加而遞減。總鋼筋用量恆隨 ε_s 增加而遞減。

- (2) 當 $\varepsilon_s \geq 0.005$ 時，隨著 ε_s 之增加， M_{n1} 與 M_{n2} 之鋼筋用量分別呈遞減與遞增之趨勢。總鋼筋用量隨 ε_s 之增加而遞增。拉力筋總用量隨 ε_s 之增加先遞減而後遞增；壓力筋用量則呈現恆遞增之趨勢。
- (3) 相較於 $0.004 \leq \varepsilon_s < 0.005$ 時之設計， $\varepsilon_s = 0.005$ 之設計不但可有較低的總鋼筋用量，且有較佳的斷面變形能力，因此不建議採用 $0.004 \leq \varepsilon_s < 0.005$ 之設計。至於 $\varepsilon_s > 0.005$ 之設計雖可能需配置更多的鋼筋(主要為壓力筋)，但可得更佳之斷面變形能力，其中取捨應由工程師視個案需求認定。當 $f'_c = 210 \text{ kgf/cm}^2$ ，以及當 $f_y = 4200 \text{ kgf/cm}^2$ 與 $f'_c \leq 420 \text{ kgf/cm}^2$ 時， $\varepsilon_s = 0.005$ 之設計可滿足耐震設計規範最大拉力筋比上限之規定。當 $f_y = 400 \text{ kgf/cm}^2$ ，搭配 $f'_c \leq 350 \text{ kgf/cm}^2$ 時，可進一步滿足 $\alpha > \alpha_{0max}$ 之要求，可更有效率的使用 M_{n2} 之鋼筋。

致謝

本研究承蒙國立台灣科技大學邁向頂尖大學計畫提供研究經費，特此致謝。

參考文獻

- [1] 內政部營建署，(2011)。「混凝土結構設計規範」。
- [2] 王麒驊，(1986)。「鋼筋混凝土學」，修訂版，九樺出版社。
- [3] Wang, C. K., Salmon, C. G., and Pincheira J. A. (2007). *Reinforced concrete design*, 6th edition. John Wiley & Sons, Inc.
- [4] Wight, J. K., and MacGregor, J. G. (2008). *Reinforced concrete: mechanics and design*. 5th edition, Prentice Hall.
- [5] Whitney, C. (1937). "Design of reinforced concrete members under flexure or combined flexure and direct compression," *ACI Journal Proceedings*, Vol. 8, No.4, 483-498.